课前预读：

《费曼物理学讲义》I ：Chpt.20

《新概念物理教程：力学》：第四章

Lecture 19, 20 刚体动能、角动量和角动量定理

定轴转动的动能

对于一个刚体的定轴转动，刚体上任意一点的速度为

$$v_i = \omega r_i$$

因此该刚体的总动能为

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2$$

式子中的求和部分正是刚体的转动惯量I，因此刚体定轴转动的动能为

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

对比质点动能，我们又看到了相似性。

动能定理

对于单质点而言，其动能为

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

对其微分得

$$dT = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

这就是**质点的动能定理**，即力$\vec{F}$所做的功为质点的动能增加。类似地，我们对刚体定轴转动的动能微分后得

$$dT = I\vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} = I\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} dt = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot d\vec{\theta} = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$$

这说明力矩$\vec{\tau}$做功为$\vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$，其做功的结果是动能的增加。这也可以作为刚体定轴转动的动能定理。

对比刚体定轴转动和质点运动的特性如下

质点运动	刚体定轴转动
速度 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	角速度 $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$
动量 $\vec{p} = m\vec{v}$	角动量 $\vec{L} = I\vec{\omega}$

动能 $T = \frac{1}{2}mv^2$	动能 $T = \frac{1}{2}I\omega^2$
动量定理 $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	角动量定理 $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
动能定理 $dT = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	动能定理 $dT = \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$

质点系的动能定理

对于一个多质点体系，其动能为

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \frac{1}{2}mv_i^2$$

类似之前的计算对它微分得

$$dT = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

每个质点上受到的力可以分成两类：一类是体系内质点间相互作用，称之为内力$\vec{F}_i^{(i)}$；另一类为环境给质点的力，称之外力$\vec{F}_i^{(e)}$。例如一些带电粒子在重力场中运动时，粒子间的电磁相互作用为内力，重力为外力。在这样的分类下上式可写为

$$dT = \sum_i \vec{F}_i^{(i)} \cdot d\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{r}_i$$

由此我们得知一个质点体系的动能增加为内力做功和外力做功的和。

质点系的动能

质点系中任意质点在某一惯性系中的坐标$\vec{r}_i$与质心系中的坐标之间有联系

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i{}'$$

其中$\vec{r}_i{}'$为质点i在质心系中的坐标，$\vec{r}_c$为质心在惯性系中的坐标。对其做时间微分得速度关系

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$$

其中$\vec{v}_i$质点在惯性系中的速度，$\vec{v}_i'$为质点在质心系中的速度，$\vec{v}_c$为质心在惯性系中的速度。将之应用于质点系的动能则得

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_c + \vec{v}_i')$$

$$=\frac{1}{2}Mv_c^2+\vec{v}_c\cdot\sum_i m_i\vec{v}_i{}'+\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2$$

上式中间一项中的求和为质心系中的总动量，我们知道其为零，因此

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2$$

现在我们得到了一个很好的结论。一个质点系的动能可以分解成两个部分，一是将整个质点系看成一个点，整体运动的动能；另一是质点系内看到的动能，或者说体系相对与质心运动的动能。这个关系称为 König Theorem。

将这个关系应用于刚体，可以将刚体的一般运动分解为质心的运动，和刚体关于质心的转动。

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+T_{\text{rotation}}$$

比定轴转动复杂一些的一种运动称为平面平行运动，在这种运动中，刚体绕某一转轴转动，但转轴会做方向不变的平行运动。当把转轴取到过质心的位置上时，则可以得到

$$T=\frac{1}{2}Mv_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega^2$$

质点系角动量定理

对于质点系，体系总角动量为

$$\vec{L}=\sum_i\vec{r}_i\times\vec{p}_i$$

对其做时间微分得

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}\times m\vec{v}_i+\sum_i\vec{r}_i\times\frac{d}{dt}\vec{p}_i$$

由于$\vec{v}_i=\frac{d\vec{r}_i}{dt}$，上式右边第一项为零，利用牛顿方程可得

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_i\vec{r}_i\times\left(\vec{F}_i^{(e)}+\vec{F}_i^{(i)}\right)$$

类似之前的分析，内力成对，且由牛顿第三定律知它们大小相同，方向相反。在计算力矩的时候也是成对出现的。如对刚体内的两点 i、j，i 点坐标为$\vec{r}_i$，受到 j 对它的力$\vec{F}_{ij}$，j 点坐标为$\vec{r}_j$，受到 i 对它的力$\vec{F}_{ji}$，且$\vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$。这两个力产生的

力矩和为

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ij}$$

$\vec{r}_i - \vec{r}_j$为两点的相对坐标，而$\vec{F}_{ij}$是两点间的相互作用，它是与两点间的相对坐标平行的，因此上式为零。因此体系的总力矩就是它受到的总外力矩。内力的力矩都两两抵消了。

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(i)} = 0$$

因此

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \vec{\tau}_{ext}$$

这就是质点系的角动量定律，即总角动量的变化为合外力矩。

由于力矩和角动量都是有参照点的，通常会将参照点取到坐标原点，但有时候为了方便也会取到其他点上去，例如取到某点 p 上，其坐标为$\vec{r}_p$，注意该点可能不是静止的。于是有关系

$$\vec{r}_i = \vec{r}_p + \vec{r}_i{}'$$

其中$\vec{r}_i{}'$为质点 i 相对于 p 点的坐标。定义相对于 p 点的角动量和力矩为

$$\vec{L}_p = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i \qquad \vec{\tau} = \sum_{\mathrm{i}} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(e)}$$

则相对于坐标原点的动量和力矩可以写作

$$\vec{L} = \sum_i \left(\vec{r}_p + \vec{r}_i{}'\right) \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_p \times M\vec{v}_c + \vec{L}_p$$

$$\vec{\tau} = \sum_i \left(\vec{r}_p + \vec{r}_i{}'\right) \times \vec{F}_I^{(e)} = \vec{r}_p \times \vec{F}^{(e)} + \vec{\tau}_p$$

对上面表示中的角动量做时间微商得

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}_p}{dt} \times M\vec{v}_c + \vec{r}_p \times M\frac{d\vec{v}_c}{dt} + \frac{d\vec{L}_p}{dt}$$

利用关系

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{(e)} \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

可得

$$\frac{d\vec{L}_p}{dt} = -\vec{v}_p \times M\vec{v}_c + \vec{\tau}_p$$

可以看到相对于 p 点的角动量定理和相对于坐标原点的角动量定理形式上并不相同，多了右边的第一项。但是在两种情况可以将此项消掉。

1. 当 p 点为质心时，$\vec{v}_p$就是$\vec{v}_c$，则

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{\tau}_c$$

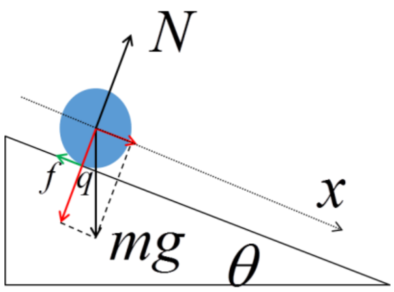
2. 当 p 点速度为零时$\vec{v}_p = 0$

$$\frac{d\vec{L}_p}{dt} = \vec{\tau}_p$$

对于这种情况也分为两种不同的情形，其一是取 p 点为静止点。其二是在每一个时刻取一个瞬时速度为零的点，称之为瞬心。比如在轮子做纯滚动时，其与地面的接触点的瞬时速度始终为零。

【例】一绕质心的转动惯量为I_c的均匀轮子沿斜面从静止纯滚动滑下。纯滚动是指在滚动过程中轮子和斜面的接触点无相对运动。

如图将 x 轴设为过轮子中心平行于斜面向下的方向。



可知轮子的动能为

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

由纯滚动条件可知

$$\dot{x} = r\omega$$

其中r为轮子半径，则

$$T = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_c}{r^2}\right)\dot{x}^2$$

由机械能守恒得

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{I_c}{r^2}\right)\dot{x}^2 = mg(x - x_0)\sin\theta$$

x_0为初始位置。这就是要求的动力学方程。它是一个一阶微分方程。

另外也可以用角动量定理来解决这个问题。根据图示的受力分析，q 点为瞬心，由平行轴定理相对于 q 点的转动惯量为

$$I_q = I_c + mr^2$$

摩擦力和支撑力相对于 q 点都无力矩，重力相对于 q 点的力矩为

$$\tau_p = mgrsin\theta$$

则运动方程为

$$(I_c + mr^2)\dot{\omega} = mgrsin\theta$$

转换变量为 x，则得

$$(I_c + mr^2)\ddot{x} = mgr^2sin\theta$$

此方程为二阶微分方程，将前面由机械能守恒得到的方程微分后即为此方程。

如果参照点不取在 q 点，而是取到质心上，情况又有不同。此时重力无力矩，而摩擦力产生力矩

$$\tau_c = fr$$

由角动量定理得

$$I_c\dot{\omega} = fr$$

但是摩擦力的大小并不知道。为了得到摩擦力的大小，列出质心的运动方程为

$$m\ddot{x} = mg\ sin\theta - f$$

带入前式中得

$$I_c\dot{\omega} = (mg\ sin\theta - m\ddot{x})r$$

在利用关系$\dot{x} = r\omega$，得到

$$I_c\ddot{x} = (mg\ sin\theta - m\ddot{x})r^2$$

即

$$(I_c + mr^2)\ddot{x} = mgr^2sin\theta$$

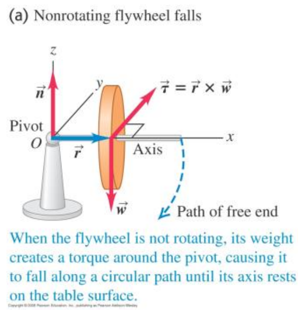
进一步计算质心沿斜面的加速度得

$$\ddot{x} = \frac{mr^2}{I_c + mr^2}gsin\theta$$

可以看到这也是一个匀加速过程，相对于一个滑块从斜面上滑下，加速度变小了，差了一个比例系数$\frac{mr^2}{I_c+mr^2}$，这是因为在轮子滚下的过程中，速度在增加，角速度也在增加，因此重力势能的减少不仅用于整体下滑的动能，还有一部分用到相对于质心转动的动能上去。从而整体加速变慢了。

陀螺进动

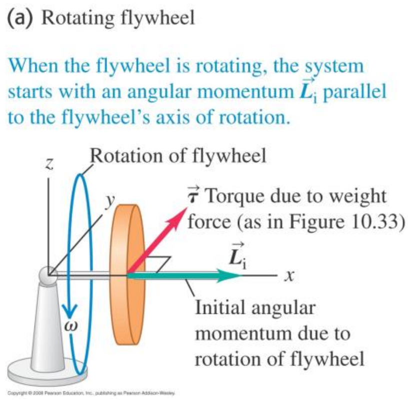
陀螺是高速转动的刚体，通常陀螺会做成轴对称的形状。高速转动的陀螺会具有非常好的稳定性，将其放置在地面上不容易倾倒，即使推它一下，可能还具备稳定性。但当它不动时并不具有这样的稳定性。

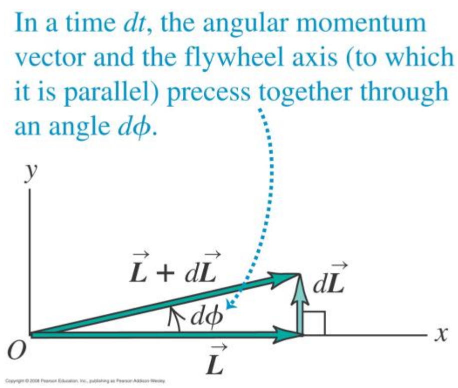


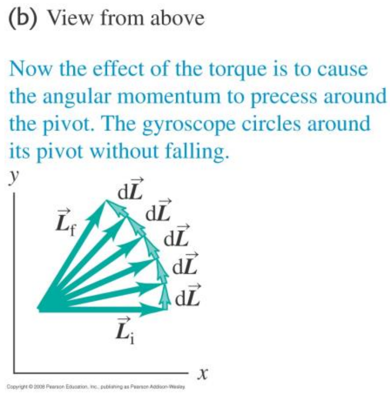
比如如图所示的陀螺水平放置，其一个支点放在支架顶

端 O 点，松手后它会掉下去。这是因为重力$\vec{w}$会相对于 O 点产生一个水平方向的力矩$\tau = \vec{r} \times \vec{w}$，这个力矩会产生向下转动的角加速度（其矢量方向为水平）。于是陀螺就掉下去了。

当这个陀螺绕轴高速转动时，初始时会有一个很大的角动量$\vec{L}$，方向在图示的 x 方向上。将轴放在支点上松手后，此时的重力矩$\vec{\tau}$与角动量垂直，其作用是使得角动量在时间 dt 内在水平方向偏转$d\phi$，也就是说转轴偏转，但其仍在水平平面内。因此重力的持续作用并不是使得陀螺倾倒，而是使得其转轴方向在水平方向上转动。







三维转动角速度和速度间的关系

在非定轴转动的情况下，刚体的转轴可能会随着时间变化而发生变化。假设在某个瞬间，其轴为 OM，则刚体上某点 P 在 dt 时间内是绕 OM 轴做圆周运动，Δt后其位置为$\vec{r} + \Delta\vec{r}$，其轨迹为在垂直于 OM 平面内的圆弧，张角为$\Delta\phi$，若定义矢量$\Delta\vec{\phi}$大小为$\Delta\phi$，方向按右手规则沿 OM 方向。则

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{\phi} \times \vec{r}$$

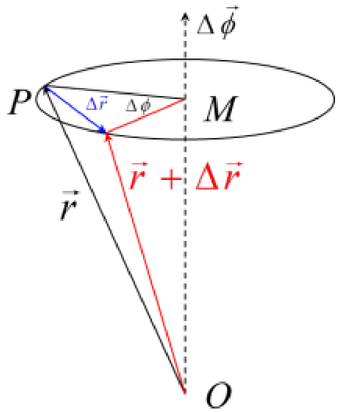
因此速度关系为

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t} \times \vec{r}$$

定义角速度矢量为

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\phi}}{\Delta t}$$

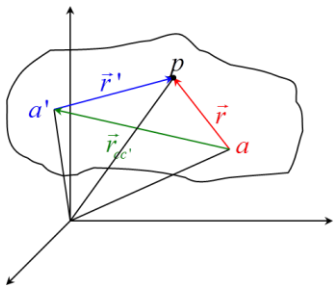
则



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

刚体绕不同点转动的角速度

在之前的轮子下滑的例题中，当取参照点为轮子和斜面的接触点以及取参照点为轮心时用的角速度是一样的。这样的做法是否正确呢？或者说当取不同参照点时刚体的转动角速度之间有什么样的关系？



如图所示，假设刚体绕刚体上a点转动的角速度为$\vec{\omega}$，而绕刚体上a'点转动的角速度为$\vec{\omega}'$。对于刚体上任意一点 p，其速度可以写成相对于a点的转动速度和a点的速度的叠加

$$\vec{v}_p = \vec{v}_a + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

类似的又可以写成

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{a'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$$

而a'点的速度也可以写成它相对于a点的转动速度和a点的速度的叠加

$$\vec{v}_{a'} = \vec{v}_a + \vec{\omega} \times \vec{r}_{aa'}$$

而

$$\vec{r}_{aa'} = \vec{r} - \vec{r}'$$

则

$$\begin{aligned}\vec{v}_p &= \vec{v}_a + \vec{\omega} \times \vec{r}_{aa'} + \vec{\omega}' \times \vec{r}' \\ &= \vec{v}_a + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}') + \vec{\omega}' \times \vec{r}' \\ &= \vec{v}_a + \vec{\omega} \times \vec{r} + (\vec{\omega}' - \vec{\omega}) \times \vec{r}' \\ &= \vec{v}_p + (\vec{\omega}' - \vec{\omega}) \times \vec{r}'\end{aligned}$$

因此可以得到

$$(\vec{\omega}' - \vec{\omega}) \times \vec{r}' = 0$$

由于 p 点是任意取的，要满足上式只有

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega}$$

也就是说刚体绕刚体上任意一点的角速度是相同的。实际上这样的参照点不必须在刚体上，只要跟着刚体一起同步运动即可。

质心系中的角动量定理

前面说过我们经常会在质心系中处理问题，而质心系有可能不是惯性系，那

么对于角动量定理会不会有影响呢?

由前可知在实验室参照系中相对于质心的角动量为

$$\vec{L}_c = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i$$

其中$\vec{r}_i'$为质点 i 相对于质心的坐标，而$\vec{v}_i$为在实验室参照系中看到的质点 i 的速度。在质心系中相对于质心的角动量为

$$\vec{L}_c' = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

其中$\vec{v}_i'$为质心系中看到质点 i 的速度，

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$$

$\vec{v}_c$为实验室参照系中看到的质心速度。注意这两个角动量式子的区别。接下来可以用实验室参照系中的角动量定理推导质心系中的角动量定理

$$\vec{L}_c = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i(\vec{v}_c + \vec{v}_i') = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i'\right) \times \vec{v}_c + \vec{L}_c'$$

上式右边第一项里的括号部分就是在质心系中求质心的位置，等于零。因此实验室参照系中看到的体系相对于质心的总角动量和质心系中看到的体系相对于质心的总角动量是相同的

$$\vec{L}_c = \vec{L}_c'$$

质心系中的力矩为

$$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(e)} = \vec{\tau}_c$$

实验室参照系中看到的体系相对于质心的总力矩和质心系里看到的相对于质心的力矩也是相同的。之前已经知道

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \vec{\tau}_c$$

因此在质心系中看到的角动量定理和在实验室参照系中看到的是一样的

$$\frac{d\vec{L}_c'}{dt} = \vec{\tau}_c'$$

角动量守恒与对称性

当质点系受到的合外力矩为零时体系的总角动量是守恒的

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

和之前的能量守恒和动量守恒类似，角动量守恒也是和体系的对称性相关的，这里的对称性称为各向同性，意思是物理规律是与方向无关的。